

# ANALISIS SIMPLIFICADO DE LA DINAMICA DE CASCARAS EN PROCESOS IMPLOSIVOS

Por P. DE ASSAS, M. RODRIGUEZ y A. LIÑAN  
E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos  
Universidad Politécnica de Madrid

## Resumen

*En este trabajo se obtienen las presiones requeridas para conseguir la compresión isentrópica y autosemejante de una bola de material denso, rodeada por una cáscara de material incompresible.*

*Se determina también la ley exterior de presiones y la evolución de los radios interior y exterior de una cáscara delgada de material incompresible sometida a un pulso de láser conocido, despreciándose la contrapresión en el interior de la cáscara.*

*Se da una primera aproximación para la compresión de una cáscara delgada de material compresible, en términos de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Los resultados de esta aproximación se extienden al caso multicapas.*

## INTRODUCCION

La implosión de pequeñas bolas de Deuterio-Tritio, inducidas por una radiación láser para producir la fusión nuclear, debe conducir a densidades finales altas (del orden de  $10^3$  ó  $10^4$  veces la densidad del material sólido). Estas densidades se pueden conseguir con un diseño adecuado del pulso del láser que produzca las presiones necesarias en la superficie exterior de la bola [1,2,3,4].

Recientemente ha aumentado el interés en el uso de cáscaras de material no fusionable que rodean al Deuterio-Tritio [5,6,7,8], en parte por conveniencia pero principalmente porque se reducen las especificaciones del pulso de láser, en particular el pico de potencia máxima.

En este trabajo se estudia la dinámica de cáscaras de material incompresible determinando la ley exterior de presiones cuando se pretende que el núcleo central, de material compresible, sigue una compresión isentrópica y autosemejante [1-4]. También se determina la ley exterior de presiones cuando la cáscara es delgada y está sometida a una radiación láser de potencia  $W(t)$  conocida despreciándose la contrapresión interior. Por último se aborda el problema de cáscaras delgadas de material compresible, y los resultados obtenidos se extienden al caso de que existan varias capas de material compresible.

## 1. CASCARAS DE MATERIAL INCOMPRESIBLE

Supongamos una cáscara esférica de material incompresible que inicialmente tiene de radio interior  $R_i$  y exterior  $R_e$ . Si esta cáscara está sometida a una presión uniforme en su superficie exterior, se genera un movimiento radial que describiremos por medio de las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento radial:

$$\frac{\partial (r^2 u)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho_l} \right) = - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2)$$

donde  $u$  es la velocidad radial,  $p$  la presión,  $r$  la coordenada radial,  $t$  el tiempo y  $\rho_l$  la densidad del material de la cáscara que suponemos constante por considerarlo incompresible.

La integración de (1) nos proporciona

$$r^2 u = r_e^2 \frac{dr_e}{dt} = r_i^2 \frac{dr_i}{dt} \quad (3)$$

donde  $r_e$  y  $r_i$  son los radios exterior e interior de la cáscara, respectivamente, en un instante  $t$  cualquiera. Estos radios están relacionados entre sí por la condición de la conservación de la masa total (volumen en este caso por ser  $\rho_\ell$  constante),

$$r_e^3 - r_i^3 = R_e^3 - R_i^3 \quad (4)$$

Llevando (3) a (2) e integrando, se obtiene,

$$\frac{p - p_e}{\rho_\ell} = \left( \frac{r_e}{r} - 1 \right) \frac{1}{r_e} \frac{d}{dt} \left( r_e^2 \frac{dr_e}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r_e}{r} \right)^4 - 1 \right] \left( \frac{dr_e}{dt} \right)^2, \quad (5)$$

donde se ha impuesto la condición de que  $p = p_e(t)$  en  $r = r_e(t)$ .

La ecuación (5) nos proporciona la distribución de presiones  $p(r, t)$  en el interior de la cáscara. Esta presión es función del tiempo a través de la presión exterior  $p_e(t)$  y del radio de la capa exterior  $r_e(t)$ , de modo que conocidos estos valores determinaríamos  $p$ . Si particularizamos (5) en  $r = r_i(t)$ , que es conocido como función de  $r_e$  a través de (4), obtenemos la presión  $p_i(t)$  en la superficie interior,

$$\frac{p_i - p_e}{\rho_\ell} = \left( \frac{r_e}{r_i} - 1 \right) \frac{1}{r_e} \frac{d}{dt} \left( r_e^2 \frac{dr_e}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^4 - 1 \right] \left( \frac{dr_e}{dt} \right)^2 \quad (6)$$

El sistema de ecuaciones (4), (5) y (6) nos permite determinar la distribución de presiones en el interior de la cáscara,  $p(r, t)$ , la presión en la superficie interior,  $p_i(t)$ , y el radio de esta superficie interior,  $r_i(t)$ , si conociésemos la presión en la superficie exterior,  $p_e(t)$ , y el radio de esta superficie,  $r_e(t)$ . Evidentemente, los datos pueden cambiarse por incógnitas y viceversa; así, pueden ser datos  $p_i(t)$  y  $r_i(t)$ , en cuyo caso deberíamos determinar  $p(r, t)$ ,  $p_e(t)$  y  $r_e(t)$ . En cualquier caso, la ecuación (3) nos permitiría obtener la distribución de velocidad radial  $u(r, t)$ .

### 1.1. Compresión Isentrópica y Autosemejante del Material Encerrado por la Cáscara

Como ejemplo de aplicación del segundo caso, en que son conocidos  $p_i(t)$  y  $r_i(t)$ , consideraremos que el material encerrado por la cáscara, por ejemplo Deuterio-Tritio, se desea comprimir en forma isentrópica y autosemejante como la obtenida en las referencias [1,2,3]. En

estas referencias se describe el campo fluidodinámico en el D-T utilizando las variables autosemejantes:

$$V = ut/r; \quad Z = (ct/r)^2; \\ R = \rho/\rho_0; \quad \lambda = r/c_0 t, \quad (7)$$

donde  $t$  es el tiempo,  $r$  la coordenada radial,  $c$  la velocidad local del sonido,  $u$  la velocidad radial y  $\rho$  la densidad local en el D-T. Las constantes  $\rho_0$  y  $c_0$  son la densidad y velocidad del sonido del D-T inicialmente.

Mediante la descripción dada en [1,2,3] se determina la presión,  $p_p(t)$ , como función del tiempo en la superficie exterior del Deuterio-Tritio y el radio,  $r_p(t)$ , de esta superficie para que el D-T se comprima de forma isentrópica. Tanto  $p_p(t)$  como  $r_p(t)$  y en consecuencia  $V(\lambda_p)$ ,  $R(\lambda_p)$  y  $Z(\lambda_p)$ , donde  $\lambda_p = r_p/c_0 t$  es el valor de  $\lambda$  en  $r = r_p$ , dependen también de la relación  $\rho_r/\rho_0$ , siendo  $\rho_r$  la densidad final que se desea alcanzar en el Deuterio-Tritio.

Dado que cuando hay una cáscara exterior rodeando al D-T, el radio exterior de la bola de D-T coincide con el radio interior de la cáscara y en esta superficie debe haber continuidad de presiones y de velocidad normal, se tiene:

$$r_i(t) = r_p(t), \quad (8.a)$$

$$p_i(t) = p_p(t), \quad (8.b)$$

$$\frac{dr_e}{dt} = \left( \frac{r_i}{r_e} \right)^2 \frac{dr_i}{dt} = \left( \frac{r_p}{r_e} \right)^2 \frac{dr_p}{dt}, \quad (8.c)$$

donde  $dr_p/dt = c_0 F(V, Z, R)$ , siendo la función  $F(V, Z, R)$  conocida como función del tiempo a través de  $V(\lambda_p)$ ,  $Z(\lambda_p)$  y  $R(\lambda_p)$ , y calculada en [1,2,3]. En el caso  $\gamma = 5/3$ , de (6) y (8) se obtiene:

$$\frac{(p_e - p_p)}{\rho_\ell c_0^2} = \left[ 2 \left( \frac{r_p}{r_e} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{r_p}{r_e} \right)^4 - \frac{3}{2} \right] \frac{V^2 R^{2/3}}{Z} - \left( 1 - \frac{r_p}{r_e} \right) \frac{2V(1-V)R^{2/3}}{Z - (1-V)^2}, \quad (9)$$

que junto con,

$$r_e = (r_p^3 + R_e^3 - R_i^3)^{1/3} \quad (10)$$

nos determinan  $p_e(t)$  y  $r_e(t)$ .

En las últimas etapas del proceso de compresión el radio de la bola de D-T,  $r_p$ , se hace muy pequeño frente al radio exterior de la cáscara  $r_e$ ,  $r_e \gg r_p$ , y como consecuencia de ello:

$$r_e \rightarrow (R_e^3 - R_i^3)^{1/3} = \text{constante}$$

de modo que (9) se reduce a,

$$\frac{p_e - p_p}{\rho_0 c_0^2} = -\frac{3}{2} \frac{V^2 R^{2/3}}{Z} \left[ 1 + \frac{4}{3V} \frac{Z(1-V)}{Z - (1-V)^2} \right]. \quad (11)$$

De la ecuación (11) se deduce que  $p_e < p_p$  en estas últimas etapas, ya que  $V < 0$  y  $Z < (1-V)^2$ . El hecho de que  $p_e$  sea menor que  $p_p$  en las últimas etapas del proceso implosivo, representa una ventaja ya que  $p_p$  alcanza valores muy elevados al final del proceso implosivo, y de esta forma se rebaja el nivel máximo de presiones exteriores y, por lo tanto, la potencia del láser que en última instancia nos proporcionaría la ley exterior de presiones requerida.

La relación  $(p_e - p_p)/\rho_0 c_0^2$  en función del tiempo ( $t = 0$  corresponde al instante en que las ondas de compresión, generadas en el D-T, llegan a  $r = 0$ ) se ha representado en la Figura 1 para dos valores de la relación  $R_i/R_e$  y un valor dado de  $\rho_i/\rho_0$ .

## 1.2. Cáscara Delgada Sometida a una Radiación Láser de Potencia $W(t)$ y sin Contrapresión Interior

Como segundo ejemplo consideraremos el caso en que la cáscara de material incompresible es delgada; esto es,

$(R_e - R_i)/R_e \ll 1$ . Supondremos también que la presión interior,  $p_i$ , es pequeña frente a la exterior,  $p_e$ , lo que es cierto en primera aproximación mientras  $r_i$  se mantiene del orden de  $r_e$ . Sin embargo, la solución correspondiente a  $p_i/p_e \ll 1$  y  $r_i/r_e \ll 1$  puede utilizarse como condición inicial para la solución del problema que aparece con  $p_i/p_e \sim 1$  y  $r_i/r_e \ll 1$ .

Para analizar este problema utilizaremos las magnitudes adimensionales,

$$\epsilon = \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^3}; \quad x = \frac{r_i}{R_e}; \quad y = \frac{r_e}{R_e}; \quad \tau = \frac{t}{t_c}, \quad (12)$$

donde  $t_c$  es un valor característico del tiempo, todavía sin determinar. De acuerdo con (12), las ecuaciones (4) y (6) pueden escribirse en la forma,

$$\frac{y}{x} = \left( 1 + \frac{\epsilon}{x^3} \right)^{1/3} \quad (13)$$

$$\left( \frac{t_c}{R_e} \right)^2 \frac{p_i - p_e}{\rho_0} = \left( \frac{y}{x} - 1 \right) \frac{1}{y} \frac{d}{d\tau} \left( y^2 \frac{dy}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{y}{x} \right)^4 - 1 \right] \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 \quad (14)$$

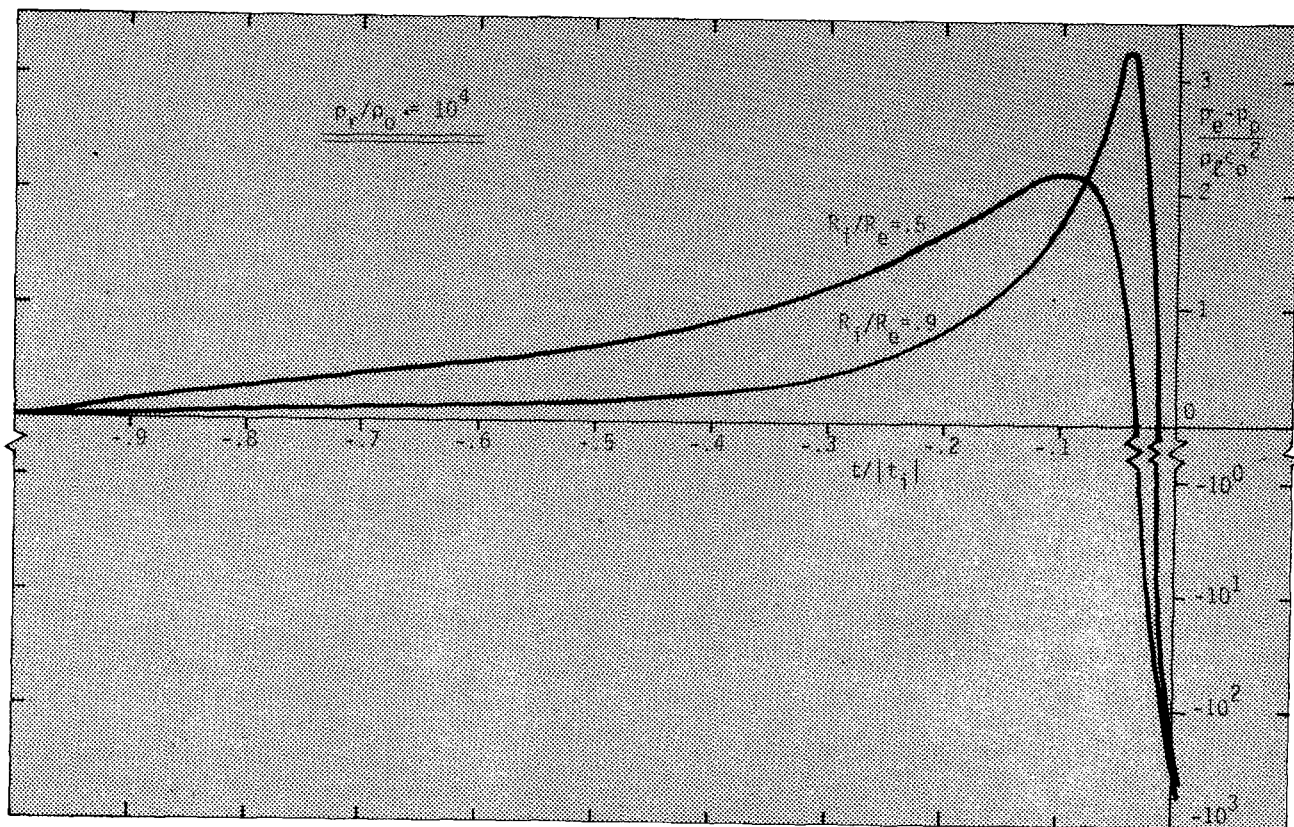


Fig. 1.—Presión,  $p_e$ , en la superficie exterior de la cáscara, referida a la presión en la superficie exterior del D-T (superficie interior de la cáscara),  $p_p$ , como función del tiempo. El D-T se comprime en forma isentrópica y autosemejante.

que en el límite de cáscara delgada,  $\epsilon \ll 1$ , toman la forma,

$$\frac{y}{x} \simeq 1 + \frac{\epsilon}{3x^3} + \dots \simeq 1 + \frac{\epsilon}{3y^3} + \dots, \quad (15)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \left( \frac{t_c}{R_e} \right)^2 \frac{p_i - p_e}{\rho_l} \simeq \frac{1}{3y^2} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + \dots \quad (16)$$

Puede observarse en (15) que el desarrollo falla cuando  $x = r_i/R_e \sim \epsilon^{1/3} \ll 1$ . Si ahora introducimos la siguiente simplificación  $p_i \ll p_e$  y llamamos  $\phi = p_e/p_c$  con  $p_c = \epsilon \rho_l (R_e/t_c)^2$ , la ecuación (16) toma la forma,

$$\phi = -\frac{1}{3y^2} \frac{d^2 y}{d\tau^2}; \text{ con } y(0) = 1; y'(0) = 0, \quad (17)$$

donde, si conociésemos  $p_e(t)$  o su equivalente  $\phi(\tau)$ , determinaríamos  $y(\tau)$  y, por lo tanto,  $r_e(t)$  y  $r_i(t)$ .

Cuando la presión exterior,  $p_e(t)$ , está producida por la ablación debida a una radiación láser intensa, la potencia del láser,  $W(t)$ , es una función de la presión,  $p_e$ , y del radio exterior,  $r_e$ , en la forma,

$$W = K p_e^{3/2} r_e^2, \quad (18)$$

tal como se muestra en la referencia [9]. En la ecuación (18)  $K = 4\pi a (5Z_i/n_c m_i)^{1/2}$ , donde  $Z_i$  y  $m_i$  son el número de carga y masa iónica respectivamente,  $n_c$  es la densidad crítica (donde se absorbe la energía del láser), y a un coeficiente lentamente variable ( $1 \leq a \leq 1/2$ ).

De acuerdo con (18) escribiremos:

$$\phi(\tau) = (\omega y^{-2})^{2/3} \quad (19)$$

siendo  $\omega(\tau) = W/(K p_c^{3/2} R_e^2)$  y sustituyendo en (17) obtendremos:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -(\omega y)^{2/3},$$

$$\text{con } y(0) = 1; y'(0) = 0. \quad (20)$$

Conocida  $W(t)$  podremos determinar el tiempo  $t_c$  de adimensionalización de  $t$  y el valor  $y = y(\tau)$ . En particular, cuando  $y \rightarrow 0$  obtendremos:

$$y = v_f(\tau - \tau_f), \quad (21)$$

donde  $v_f = (dy/d\tau)_{\tau=\tau_f}$  supuesta finita. Obsérvese que  $\tau - \tau_f$  es negativo, pero también es negativo  $v_f$  ya que la velocidad radial, implosiva, está dirigida hacia los radios decrecientes.

Como hemos visto, la formulación desarrollada hasta aquí deja de ser válida cuando  $y \sim x \sim \epsilon^{1/3}$ . En este caso utilizamos las nuevas variables adimensionales,

$$\xi = x\epsilon^{-1/3}; \quad \eta = y\epsilon^{-1/3};$$

$$\sigma = (\tau - \tau_f) v_f \epsilon^{-1/3}, \quad (22)$$

con lo que las ecuaciones (13) y (14), esta última con  $p_i = 0$ , toman la forma:

$$\eta^3 = \xi^3 + 1 \quad (23)$$

$$\frac{\epsilon^{5/9} [\omega(\tau_f)]^{2/3}}{v_f^2 \eta^{4/3}} = -\frac{1}{\eta} \left( \frac{\eta}{\xi} - 1 \right) \frac{d}{d\sigma} \left( \eta^2 \frac{d\eta}{d\sigma} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\eta}{\xi} \right)^4 - 1 \right] \left( \frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2, \quad (24)$$

y en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  se reduce a,

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \eta^2 \frac{d\eta}{d\sigma} \right) = \frac{\eta}{2} \left[ \left( \frac{\eta}{\xi} \right)^2 + 1 \right] \left( \frac{\eta}{\xi} + 1 \right) \left( \frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2, \quad (25)$$

ya que en esta última etapa puede despreciarse el efecto de la presión exterior por ser  $\epsilon \ll 1$ , aunque

$$\phi = [\omega(\tau_f)]^{2/3} \eta^{-4/3} \epsilon^{-4/9} \quad (26)$$

es grande frente a la unidad.

La ecuación (25) debe integrarse con la condición de que empalme, para  $\sigma \rightarrow \infty$ , con la solución anterior dada en (21) para  $\tau \rightarrow \tau_f$ . La solución (21) escrita en las variables  $\sigma$ ;  $\eta$ , toma la forma  $\sigma = \eta$ , de modo que las condiciones para integrar (25) son:  $\eta \rightarrow \sigma$  y  $d\eta/d\sigma \rightarrow 1$  cuando  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Haciendo el cambio,

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \xi^{-3/2} G(\xi), \quad (27)$$

la ecuación (25) se reduce a,

$$\frac{d(\ln G)}{d\xi} = \frac{1}{2\eta} \left[ 1 + \frac{\xi}{\eta} + \left( \frac{\xi}{\eta} \right)^2 \right]. \quad (28)$$

El sistema de ecuaciones (23), (27) y (28), que debe integrarse con las condiciones citadas más arriba, nos permite determinar  $\eta(\sigma)$  y  $\xi(\sigma)$ . Esta solución, junto con el valor de  $\phi$  dado en (26), está representada en la Figura 2.

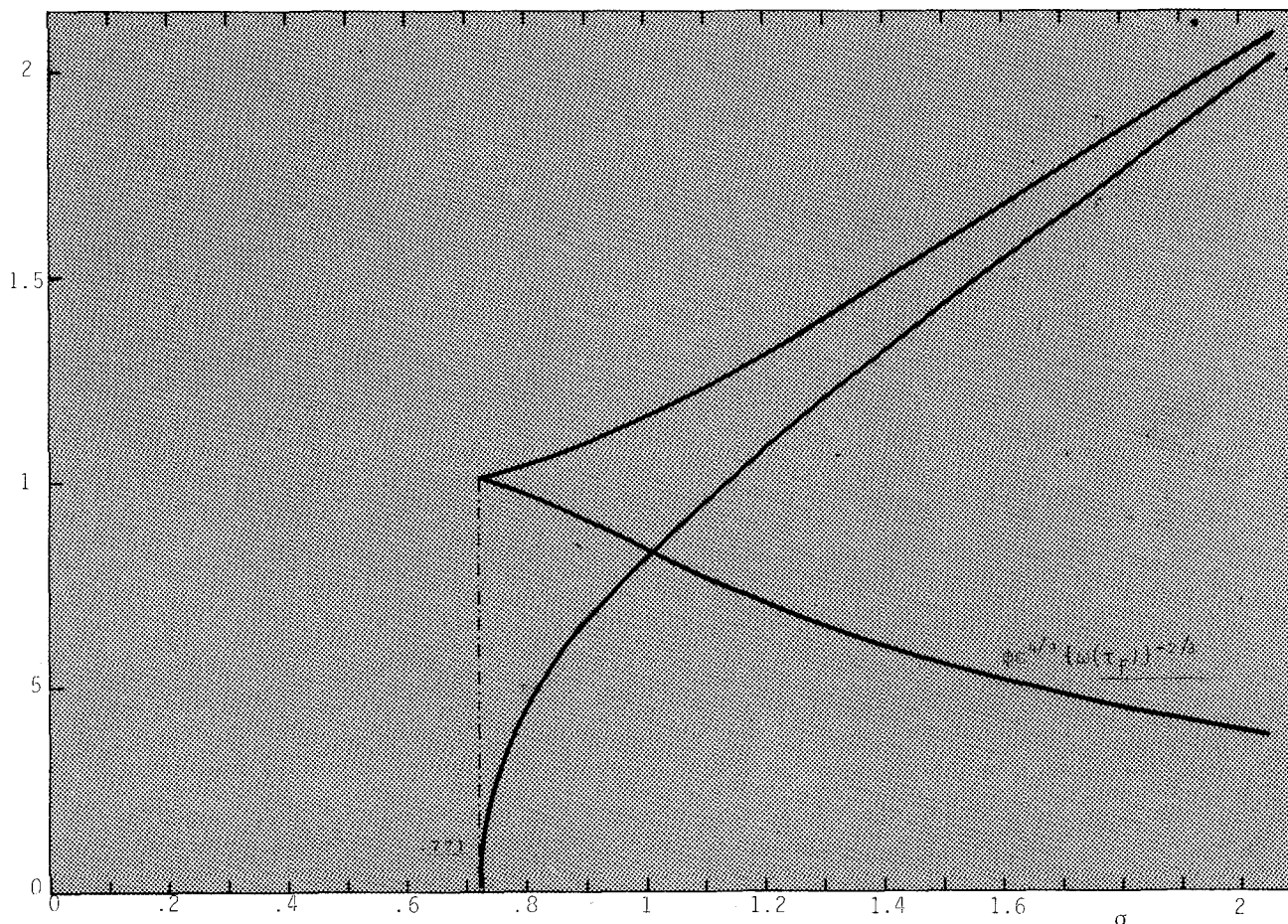


Fig. 2.—Radio interior,  $\xi$ , exterior,  $\eta$ , y presión,  $\phi$ , adimensionales, como funciones del tiempo adimensional,  $\sigma$ , en las últimas etapas del colapso de la cáscara incompresible.

La solución de la Figura 2 nos muestra que el radio interior se anula ( $\xi = 0$ ) en el instante  $\sigma = \sigma_f = 0,721$ . A partir de este instante el movimiento pasa de ser implosivo a explosivo. En  $\sigma = \sigma_f$  la velocidad cambia bruscamente de signo sin cambiar el módulo. Esto corresponde a una onda de choque que, moviéndose en un fluido incompresible con velocidad infinita, cambia la velocidad sin cambiar la densidad. En  $\sigma = \sigma_f$  el radio exterior alcanza su valor mínimo  $\eta = 1$  ó bien  $r_e = (3V/4\pi)^{1/3}$  donde  $V$  es el volumen de la cáscara, creciendo posteriormente.

Para la descripción completa de esta última etapa sería necesario conocer las constantes  $\tau_f$  y  $v_f$ , pero éstas no son conocidas a menos que integremos la ecuación (20) y para ello es necesario conocer  $W(t)$ . A continuación daremos los valores de  $\tau_f$  y  $v_f$  en el supuesto de que  $W(t)$  sea una función de la forma,

$$W(t) = B t^{3n/2} \quad (29)$$

en cuyo caso tendremos,

$$\omega(\tau) = \frac{B t_c^{3n/2}}{K p_c^{3/2} R_e^2} \tau^{3n/2}, \quad (30)$$

y dado que  $p_c = \epsilon \rho (R_e/t_c)^2$ , si elegimos

$$t_c = \left( \frac{K}{B} (\epsilon \rho)^{3/2} R_e^5 \right)^{2/3(n+2)},$$

la ecuación (30) se reduce a,

$$\omega(\tau) = \tau^{3n/2}, \quad (31)$$

de modo que (20) toma la forma,

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -y^{2/3} \tau^n, \quad (32)$$

que con las condiciones  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  nos propor-

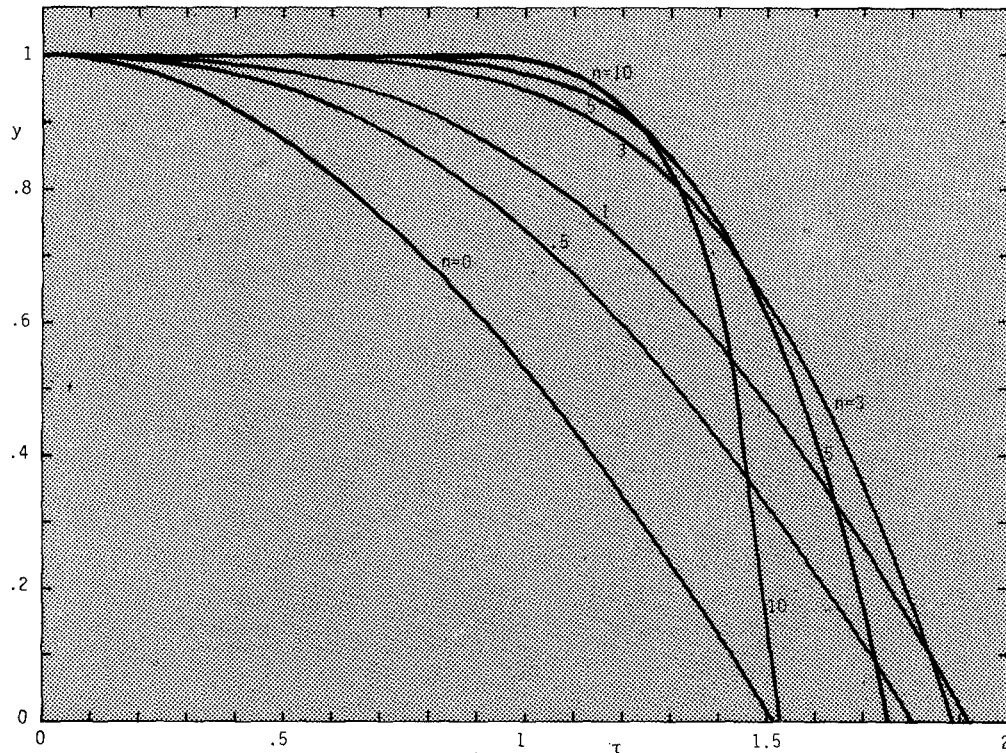


Fig. 3.—Radio exterior adimensional,  $y$ , como función del tiempo adimensional,  $\tau$ , para diversos valores del parámetro  $n$ .

ciona la solución representada en la Figura 3. La presión en la superficie exterior  $\phi(\tau)$ , dada por la ecuación (19), con  $\omega(\tau) = \tau^{3n/2}$ , se ha representado en la Figura 4. A su vez, los valores de  $v_f$  y  $\tau_f$  se dan en la Figura 5 como funciones del exponente  $n$ .

## 2. CÁSCARA DELGADA DE MATERIAL COMPRESIBLE

Cuando tenemos una cáscara delgada,  $(R_e - R_i)/R_e \ll 1$ , de material compresible, en la ecuación de cantidad de movimiento el término  $Du/Dt$ , que representa la aceleración del fluido, es prácticamente la misma para todas las capas de la cáscara ya que varía entre  $d^2 r_e/dt^2$  en la capa exterior y  $d^2 r_i/dt^2$  en la interior, y como consecuencia,

$$\begin{aligned} |(d^2 r_e/dt^2) - (d^2 r_i/dt^2)| / (d^2 r_e/dt^2) &\sim \\ &\sim (R_e - R_i)/R_e = \epsilon \ll 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, escribiremos la ecuación de cantidad de movimiento radial en la forma,

$$\rho \frac{d^2 r_e}{dt^2} = - \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (33)$$

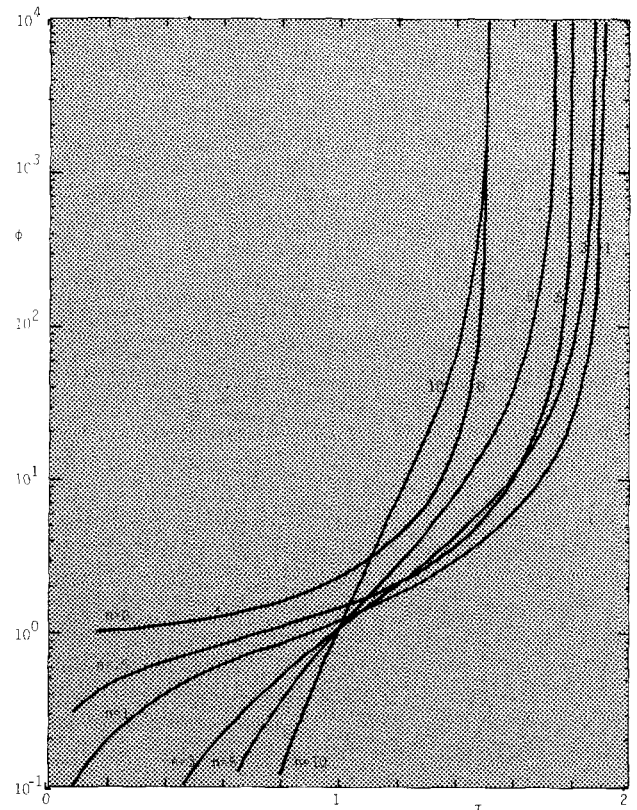


Fig. 4.—Presión adimensional,  $\phi$ , como función del tiempo adimensional,  $\tau$ , para diferentes valores del parámetro  $n$ .



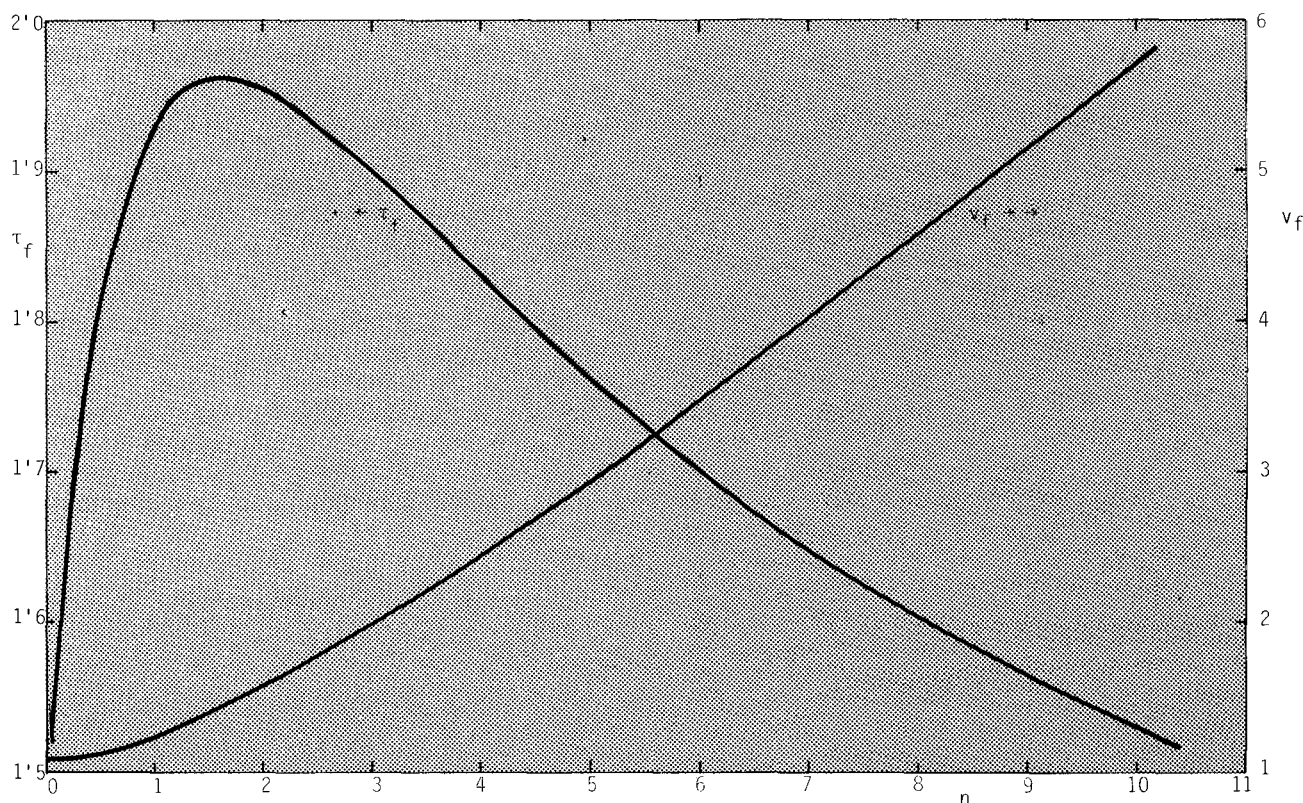


Fig. 5.—Instante de colapso,  $\tau_f$ , y velocidad de la superficie exterior e interior en ese instante,  $v_f$ , como funciones del exponente  $n$  de la potencia del láser.

Si la ecuación (33) la multiplicamos por  $-4\pi r^2 dr$  e integramos entre  $r$  y  $r_e$  tenemos:

$$\frac{d^2 r_e}{dt^2} \int_r^{r_e} 4\pi r^2 \rho dr = -4\pi \int_r^{r_e} r^2 \frac{\partial p}{\partial r} dr. \quad (34)$$

La primera de las integrales es,

$$\int_r^{r_e} 4\pi r^2 \rho dr = \alpha M, \quad (35)$$

siendo  $M$  la masa total de la cáscara y  $\alpha M$  la masa comprendida entre la capa exterior y la capa de radio  $r$ . Obsérvese que  $\alpha$  hace el papel de la variable independiente  $r$  y  $0 \leq \alpha \leq 1$  cuando  $r_e \geq r \geq r_i$ . Por otra parte, la segunda integral se puede escribir en la forma,

$$\int_r^{r_e} 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial r} dr \approx 4\pi r_e^2 [p_e(t) - p(\alpha, t)], \quad (36)$$

donde hemos sustituido, en primera aproximación,  $r$  por  $r_e$  ya que  $r_e > r > r_i$  y  $(r_e - r_i)/r_e \sim \epsilon \ll 1$ . Según (35) y

(36), la ecuación (34) toma la forma,

$$\alpha M \frac{d^2 r_e}{dt^2} = -4\pi r_e^2 [p_e(t) - p(\alpha, t)]. \quad (37)$$

Para determinar  $r$  como función de  $\alpha$  utilizamos (35) que puede reescribirse en la forma,

$$r_e^3 - r^3 = \frac{3M}{4\pi} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\rho(\alpha, t)}, \quad (38)$$

y en particular, el radio interior está dado por,

$$r_e^3 - r_i^3 = \frac{3M}{4\pi} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\rho(\alpha, t)}. \quad (39)$$

La ecuación (37) nos permitiría obtener  $p(\alpha, t)$ , supuestos conocidos  $r_e(t)$  y  $p_e(t)$ . De la ecuación (39) determinaríamos  $r_i(t)$  si conociésemos también  $\rho(\alpha, t)$ . Por último, de (37), particularizada para  $\alpha = 1$  ( $r = r_i$ ), tendríamos:

$$M \frac{d^2 r_e}{dt^2} = -4\pi r_e^2 [p_e(t) - p_i(t)], \quad (40)$$

que nos determinaría  $p_i(t)$ . Es evidente que necesitamos una ecuación más, la de la energía que todavía no hemos utilizado, así como las ecuaciones de estado del fluido, para poder determinar  $\rho(\alpha, t)$ .

Si el proceso es tal que se mantiene constante la entropía de cada partícula fluida, la ecuación de la energía nos diría que  $S = S_0(\alpha)$ . Y si el fluido se comporta como un gas perfecto, la ecuación anterior es equivalente a,

$$\frac{p(\alpha, t)}{p_0(\alpha)} = \left[ \frac{\rho(\alpha, t)}{\rho_0(\alpha)} \right]^\gamma, \quad (41)$$

donde  $\gamma = c_p/c_v$  es la relación de calores específicos, que consideramos constante y  $p_0(\alpha)$  y  $\rho_0(\alpha)$  la presión y densidad iniciales de cada capa fluida.

Con las ecuaciones (37) y (41) determinamos  $p(\alpha, t)$  y  $\rho(\alpha, t)$  y de (39) obtenemos  $r_i(t)$ , con lo que el problema estaría completamente determinado (supuesto conocidos  $p_e, r_e, p_0$  y  $\rho_0$ ).

Análogamente al caso considerado en el apartado 1.2., si la presión exterior  $p_e$  está producida por la ablación debida a una radiación láser y si la presión interior  $p_i$  es pequeña frente a  $p_e$ , la ecuación (40) puede ser escrita en la forma:

$$M \frac{d^2 r_e}{dt^2} = -4\pi r_e^2 p_e = -4\pi r_e^2 \left[ \frac{W(t)}{K r_e^2} \right]^{2/3}; \quad (42)$$

que utilizando las magnitudes adimensionales,

$$y = r_e/R_e, \quad \tau = t/t_c,$$

$$\omega(\tau) = W/(K p_c^{3/2} R_e^2),$$

toma la forma,

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -(\gamma \omega)^{2/3}; \quad (43)$$

siendo  $p_c = M/(4\pi R_e t_c^2)$  y determinando  $t_c$  una vez que se conoce la forma de la función  $W(t)$ . La ecuación (43), que debe integrarse con las condiciones  $y(0) = 1$ ;  $y'(0) = 0$ , es idéntica a la ecuación (20) del caso incompresible.

En el caso particular en que  $W(t)$  es de la forma dada en (29),  $\omega(t)$  sería de la forma dada en (30) y como  $p_c = M/(4\pi R_e t_c^2)$ , elegiríamos  $t_c$  tal que,

$$t_c = \left[ \frac{K}{B} \left( \frac{M}{4\pi} \right)^{3/2} R_e^{1/2} \right]^{2/3(n+2)}$$

y por lo tanto  $\omega(\tau) = \tau^{3n/2}$ , de modo que (43) se reduce a,

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -y^{2/3} \tau^n, \quad (44)$$

idéntica a (32), cuya solución está dada en la Figura 3. A su vez, la presión exterior  $p_e$  sería la dada en la Figura 4,

$$\phi = \omega^{2/3} y^{-4/3}, \quad (45)$$

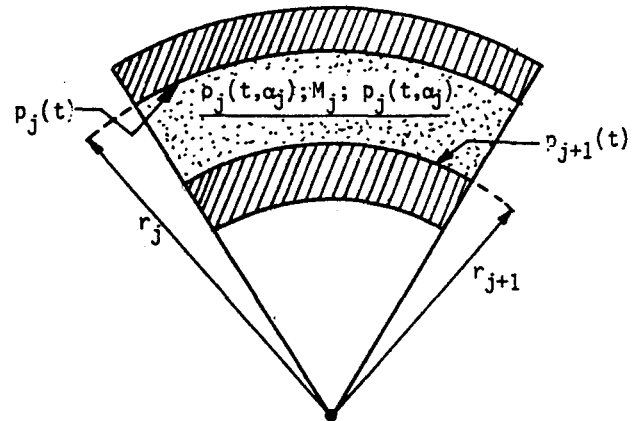
idéntica a (19). En estas expresiones sólo cambian, con respecto a las del caso incompresible, los valores de adimensionalización  $p_c$  y  $t_c$ .

### 3. CÁSCARA FORMADA POR MULTICAPAS DE MATERIALES COMPRESIBLES

Si consideramos una cáscara formada por  $n$  capas de materiales diferentes, cada una de ellas de masa  $M_j$  y espesor pequeño con respecto a su radio inicial, podemos utilizar las ecuaciones (37) y (39) para cada capa, de modo que,

$$\alpha_j \frac{M_j}{4\pi r_j^2} \frac{d^2 r_j}{dt^2} = p_j(\alpha_j, t) - p_j(t), \quad (46)$$

$$\frac{4\pi(r_j^3 - r_{j+1}^3)}{3M_j} = F_j(t) = \int_0^1 \frac{d\alpha_j}{\rho_j(\alpha_j, t)}, \quad (47)$$



donde  $r_j$  es el radio exterior y  $r_{j+1}$  el radio interior de la capa  $j$  ( $r_{j+1}$  es, a su vez, el radio exterior de la capa  $j+1$ ),  $p_j(t)$  es la presión en  $r_j(t)$  y  $p_j(\alpha_j, t)$  y  $\rho_j(\alpha_j, t)$  la presión y densidad en un radio interior de la capa caracterizada por  $\alpha_j$ . Particularizando (46) en  $\alpha_j = 1$  se tiene,

$$\frac{M_j}{4\pi r_j^2} \frac{d^2 r_j}{dt^2} = p_{j+1}(t) - p_j(t) \quad (48)$$

Al sistema (47)-(48) de  $2n$  ecuaciones para determinar los  $n+1$  radios y las  $n+1$  presiones, han de añadirse dos relaciones más; por ejemplo, la presión,  $p_1(t)$ , en el exterior de la cáscara y el radio exterior de la cáscara,  $r_1(t)$ , o cualquier otra pareja. Además han de darse  $n$  expresiones para las funciones  $F_j(t)$ ; para la determina-



ción de estas funciones se necesita  $\rho_j(\alpha_j, t)$ , que lo obten-  
dríamos con ayuda de la ecuación de la energía.

Si el proceso es tal que se conserva la entropía de cada partícula fluida, la ecuación de la energía se puede sustituir por  $S_j = S_{oj}(\alpha_j)$ , y si el fluido se comporta como un gas perfecto, las ecuaciones de isentropía se reducen a,

$$\frac{p_j(\alpha_j, t)}{\rho_{oj}(\alpha_j)} = \left[ \frac{\rho_j(\alpha_j, t)}{\rho_{oj}(\alpha_j)} \right]^{\gamma_j} \quad (49)$$

donde  $\gamma_j$  es la relación de calores específicos de cada material que supondremos constante, y  $p_{oj}(\gamma_j)$  y  $\rho_{oj}(\gamma_j)$  la presión y densidad iniciales de cada partícula fluida.

Despejando  $p_j(\alpha_j, t)$  de (49) y llevándolo a (46) se tiene,

$$\rho_j(\alpha_j, t) = \frac{\rho_{oj}(\alpha_j)}{[p_{oj}(\alpha_j)]^{1/\gamma_j}} \left[ p_j(t) + \frac{M_j}{4\pi r_j^2} \frac{d^2 r_j}{dt^2} \alpha_j \right]^{1/\gamma_j} \quad (50)$$

y por lo tanto  $F_j(t)$  viene dada por,

$$F_j(t) = \int_0^1 \left[ \frac{\rho_{oj}(\alpha_j)}{p_j(t) + \frac{M_j}{4\pi r_j^2} \frac{d^2 r_j}{dt^2} \alpha_j} \right]^{1/\gamma_j} \frac{d\alpha_j}{\rho_{oj}(\alpha_j)} \quad (51)$$

En el caso particular de que todas las partículas fluidas tuviesen la misma entropía dentro de cada capa,  $p_{oj}(\alpha_j)$  y  $\rho_{oj}(\alpha_j)$  serían constantes dentro de cada capa, de modo que (51) puede integrarse para dar,

$$F_j(t) = \frac{\gamma_j}{(\gamma_j - 1) \rho_{oj}} \left[ \frac{p_{oj}}{p_j(t)} \right]^{1/\gamma_j} \left[ 1 + \frac{M_j}{4\pi r_j^2 P_j} \frac{d^2 r_j}{dt^2} \right]^{\frac{\gamma_j - 1}{\gamma_j}} - 1. \quad (52)$$

$$\frac{M_j}{4\pi r_j^2 P_j} \frac{d^2 r_j}{dt^2}$$

Sustituyendo (52) en (47), y con (48), se obtiene un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden. En estas  $2n$  ecuaciones aparecen las  $n$  derivadas de segundo orden  $d^2 r_i / dt^2$ , por lo que se

necesitan  $2n$  condiciones iniciales. Estas  $2n$  condiciones iniciales son:

$$r_j(0) = R_j \quad y \quad (dr_j/dt)_{t=0} = 0 \quad (53)$$

#### 4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha determinado la ley temporal de presiones en la superficie exterior de una cáscara de material incompresible, para que el núcleo central, de material compresible, siga una evolución isentrópica y autosemejante como la determinada en las referencias [1,2,3]. En este análisis se observa cómo la presión en la superficie exterior de la cáscara se reduce, con respecto a la que sería necesaria si no hubiese cáscara, en las últimas etapas del proceso implosivo (Figura 1). Esto es debido a que en las primeras etapas la cáscara adquiere energía cinética que se transforma en energía interna en las últimas etapas del proceso. Se consigue así una reducción apreciable del nivel máximo de presiones necesarias y, como consecuencia, una reducción de la potencia máxima del láser.

Se describe también la dinámica de una cáscara delgada de material incompresible sin contrapresión en el interior y con la presión exterior producida por una radiación láser de potencia  $W(t)$ . Se determinan los radios interior y exterior así como la presión en la superficie exterior (véase Figura 2) de modo universal; esto es: para cualquier ley temporal de la potencia del láser. Evidentemente, en la adimensionalización de las variables aparecen parámetros que dependen de cómo sea esta ley temporal, pero sólo son necesarios para la determinación de las magnitudes dimensionales. Cuando se quiere describir el proceso de colapso de la cavidad, los efectos de compresibilidad del material se hacen importantes pero no lo son en etapas anteriores. Por lo tanto, la solución obtenida en 1.2. correspondería a las etapas previas al colapso y sería la solución con la que debemos empalmar el problema que se plantea cuando se retienen los efectos de compresibilidad.

Por último se describe también la dinámica de una cáscara delgada de material compresible. Se da una descripción simple que se aplicará al caso multicapas siempre que el espesor de cada capa se mantenga pequeño frente a su radio inicial. Se muestra también cómo, en el caso en que la contrapresión interior es nula, el problema de una capa se puede reducir al del caso incompresible considerado en 1.2.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) RODRIGUEZ, M.; *"Implosiones y Explosiones en Medios Condensados"*, Tesis Doctoral, U.P.M., Madrid, 1977.
- (2) RODRIGUEZ, M. y LIÑAN, A.; *"Implosiones Autosemejantes Isentrópicas y No Isentrópicas"*, J.E.N. 405, Madrid, 1978.
- (3) RODRIGUEZ, M. y LIÑAN, A.; *"Self-Similar Isentropic Implosions"*, J.E.N. 477, Madrid, 1980.
- (4) FERRO-FONTAN, C.; GRATTON, J. y GRATTON, R.; *Phys. Lett.* 55A, 1, 1975.
- (5) CLARKE, J. S.; FISHER, H. N. y MASON, R. J.; *Phys. Rev. Lett.* 30, 1, 1973.
- (6) BRUECKNER, K. A. y JORNA, S.; *Rev. Mod. Phys.*, 46, 2, 1974.
- (7) KIRKPATRICK, R. C.; KREMER, C. C.; MADSEN, L. C.; ROGERS, H. H. y COOPER, R. S.; *Nucl. Fusion*, 15, 1975.
- (8) BRUECKNER, K. A.; CAMPBELL, P. M. y GRANDEY, R. A.; *Nucl. Fusion*, 15, 1975.
- (9) SANZ, J.; LIÑAN, A.; RODRIGUEZ, M. y SANMARTIN, J. R.; *Phys. Fluids*, 24, 11, 1981.